CCPC 吉林赛站解题报告

上海交通大学

mistergalahad@gmail.com

2018.09.22

Problem A - The Fool

题意

求 $\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ 的奇偶性

Problem A - The Fool

题解

1. 根号分块　时间复杂度 $O(\sqrt{n})$
2. 考虑不定方程

$$xy \le n \quad x, y \ge 1$$

解的组数 Ans

Problem A - The Fool

题解

1. 根号分块　时间复杂度 $O(\sqrt{n})$
2. 考虑不定方程

$$xy \le n \quad x, y \ge 1$$

解的组数 Ans

Problem A - The Fool

题解

1. 根号分块　时间复杂度 $O(\sqrt{n})$
2. 考虑不定方程

$$xy \le n \quad x, y \ge 1$$

解的组数 Ans

Problem A - The Fool

题解

$$
\begin{aligned}
Ans &= \sum_x \sum_y [xy \le n] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

$\forall x \neq y$, (x, y) 总是成对出现的，Ans 的奇偶性取决于 $x = y$ 的个数

Problem B - The World

题意

给定某个时区的当地时间，计算另一个时区的相应日期和时间

Problem B - The World

题解

模拟即可，注意十二小时制的细节

Problem C - Justice

题意

给定不超过 10^5 个质量为 $\frac{1}{2^x}(x \geq 1)$ 的砝码。求能否分成两个质量之和都不小于二分之一的集合并给出方案。

Problem C - Justice

题解

结论

当且仅当总质量小于 1 时无解。当总质量不小于 1 时，总能选出一个集合其总质量为 $\frac{1}{2}$。

构造方法

将砝码从大到小排序，累加至 $\frac{1}{2}$ 即可。

Problem C - Justice

题解

证明

令 $x + \frac{1}{2^k} = y \quad x < \frac{1}{2} \leq y$

注意到 $\frac{1}{2^k}|x$, 并且 $\frac{1}{2^k}|\frac{1}{2}$,

从而 $\frac{1}{2^k}|(\frac{1}{2} - x) \leq (y - x) = \frac{1}{2^k}$

$\mathrm{y} = \frac{1}{2}$

Problem D - The Moon

题意

每赢一局 (赢的概率为 p) 能以概率 q 开一个箱子，如果开箱失败 $q = q + 2\%$，如果该局失败 $q = q + 1.5\%$。求直到成功开箱之前期望玩的局数。

Problem D - The Moon

题解

倒着 DP。令 f_q 表示当前开箱成功率为 q 的情况下，还需玩的局数的期望。

$$f_{100\%} = \frac{1}{p}$$

$$f_q = pq + p(1-q)f_{q+2\%} + (1-p)f_{q+1.5\%}$$

Problem E - The Tower

题意

正圆锥高为 h，底面半径 r，底面中心在坐标原点。

质点从 (x_0, y_0, z_0) 开始运动，速度矢量 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$，求质点与圆锥相撞时间。

Problem E - The Tower

题解

圆锥曲面方程

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} = \frac{h-z}{h}$$

直线参数方程

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_x, v_y, v_z)$$

求解一元二次方程，取较小的一根即可。

Problem F - The Hermit

题意

数轴上 $1, 2, \cdots, n$ n 个整点，给定每个点的覆盖半径 r_i $(r_i + 1 \geq r_{i+1})$, 对每个整点 i 求 f_i

$$f_i = |\{k \mid k < i \text{ and there exists } j$$

$$\text{ensuring that } j \text{ covers } i\ k,\ dis_{ij} \leq dis_{kj}\}|$$

Problem F - The Hermit

题解

关键性质

覆盖区间的左边界时单调 (不严格) 向右，对于点对 (i, j), 如果 j 无法覆盖到 i, 那么 j 之后的点也不行，这说明能覆盖一个点 i 的中心区间边界关于 i 也呈现单调性。

Problem F - The Hermit

题解

考虑能覆盖 k 的区间 $[l, r]$, 事实上 $l = k + 1$ 而 r 是单调增的，那么 k 能产生贡献的 i 的区间就是 $[l, 2 * r - k]$。

线性扫一遍维护区间边界即可。

Problem G - High Priestress

题意

使用不超过 10^5 个阻值为 1 的电阻，进行串联、并联，构造一个阻值大约为 x 的电网络。

Problem G - High Priestress

题解

埃及分数：使用分子为一的分数相加来表示

$$x = \sum_i \frac{1}{k_i}\ (k_i \geq k_{i+1})$$

将 k_i 个电阻并联，再将并联块串联。

Problem G - High Priestress

题解

贪心策略

$$k_i = \left\lceil \frac{1}{r} \right\rceil$$
$$r = r - \frac{1}{k_i}$$

直接构造用的数量会超，需要随机调整或者暴力搜一下。

Problem H - Lovers

题意

n 个数，每次操作选择一段区间，把每个数的首尾都加上一个数位 x，询问区间和。

Problem H - Lovers

题解

硬核线段树

对于一个长度为 l 的数，做一次添加 x 的修改，相当于给这个数加上 $(10^l + 1)x$，我们只要维护数的长度的指数和就可以做修改

Problem H - Lovers

题解

对于每个区间维护一个 s，表示在数字的末尾加上 s，在开头加上 s 的反串，为了方便标记的合并，还可以维护一下 s 的长度。

Problem I - Strength

题面

游戏王。Alice 有 n 只怪兽，Bob 有 m 只怪兽，每只怪兽力量值为 s_i，仅能做一次攻击。打攻击表示怪兽有贯通伤害，打防御表示没有。求单回合最大伤害。

Problem I - Strength

题解

不考虑防御怪，则造成的伤害 D 为

$$\sum_{i \in S_{atk}} s_i - \sum_{j \in S_{def}} s_j \tag{1}$$

从而产生两种策略。

Problem I - Strength

题解

两种策略

- 全部打光对于每只 Bob 的怪，选择恰好能打过的怪兽去打，剩下的直接攻击。
- 直接贪心最大的打最小的，次大的打次小的，直到打不过为止。

Problem I - Strength

题解

考虑防御怪

显然如果不打完，没必要打防御怪浪费输出，从而只要贪心减少在防御怪身上的耗费即可。

Problem J - Wheel of Fortune

题面

n 个球，m 个颜色，w_{ij} 表示球 i 染颜色 j 的权值，要求每种球染一种颜色，并将所有球排成环，相邻颜色不同，求所有球染色方案的极差最小值。

Problem J - Wheel of Fortune

题解

将所有染色权值排序，枚举最小值和最大值，区间内为所有可用的染色匹配边。显然对于合法的区间，区间端点是单调的。

Problem J - Wheel of Fortune

题解

转化为判定问题，是否存在一种对于球的完备匹配，且匹配次数最多的颜色数量不超过 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。

Problem J - Wheel of Fortune

题解

匹配存在的充要条件

- 每个球都要有可用的颜色
- 不存在一种颜色，有超过一半的球不得不选它

构造性证明

考虑出现次数最多的颜色

Problem K - The Magician

题面

万智牌。两个人各有五种牌（平原、沼泽、山脉、海岛、森林），每种牌有对应效果，出牌和效果结算的策略固定，集齐五种牌获得胜利，求游戏结果

Problem K - The Magician

题解

硬核模拟，写就行了

Problem L - The Hanged Man

题面

$n \leq 50$ 个节点的树，$m \leq 5000$ 大小的背包，每个节点有重量 w_i 和价值 p_i。要求选出一个独立集，重量大小不超过 m，总价值最大。

Problem L - The Hanged Man

题解

普通树形背包复杂度 $O(nm^2)$，不可取。

考虑在 dfs 序上做 01 背包。

Problem L - The Hanged Man

题解

对整棵树做轻链剖分，dfs 先走轻儿子，最后再走重儿子。这样从重儿子子树回溯的时候会直接回到重链顶端，我们所选独立集的后续发展与这条重链的中间节点是否在独立集内没有关系。

Problem L - The Hanged Man

题解

从而背包是我们只要记下该节点的 $log(n)$ 个重链顶端是否在独立集内，该状态的大小为 $2^{log(n)} = n$。$dp_{i,mask,m}$ 表示走到 i 这个节点，$log(n)$ 个重链顶端的状态为 $mask$，所选重量为 m 的最大价值，直接背包。